Über die Unverschärfbarkeit eines Satzes von Orlicz bezüglich vollständige Systeme

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

OLEVSKIJ [1] hat kürzlich u. a. gezeigt, daß *es ein orthonormiertes System von Funktionen* $\theta_n(x) \in L^\infty[0, 1]$ *gibt, welches* $L[0, 1]$*-vollständig ist* [1]) *und für welches*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n(x)|^{2+\varepsilon} < \infty$$

in $[0, 1]$ *überall gilt.*

Damit hat er in gewissem Sinne die Unverschärfbarkeit des folgenden Satzes von ORLICZ [2] bewiesen:

Ist $\{\varphi_n(x)\}$ *ein beliebiges* $L^2[0, 1]$*-vollständiges orthonormiertes System, so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) = \infty$ *fast überall.*

In diesem Aufsatz beweisen wir zwei weitere Sätze bezüglich der Unverschärfbarkeit des Orliczschen Satzes.

Satz I. *Sei* $\{\varepsilon_k\}$ *eine beliebige positive Zahlenfolge mit* $\varepsilon_k \log k \to \infty$ $(\varepsilon_k \leqq 1)$. *Dann gibt es ein* $L[0, 1]$*-vollständiges orthonormiertes System* $\{\psi_n(x)\}$ *derart, daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^{2+\varepsilon_n} < \infty \tag{1}$$

in $[0, 1]$ *überall besteht.*

Es ist so klar, daß *es eine Folge* $\{\varepsilon_k\}$ *mit* $\varepsilon_k \to 0$ *gibt, für die* (1) *gilt.*

Satz II. *Sei* $\{\lambda_n\}$ *eine beliebige positive Zahlenfolge mit* $\lambda_n \to \infty$. *Dann gibt es ein* $L[0, 1]$*-vollständiges orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\Phi_n(x)|^2 < \infty \tag{2}$$

in $[0, 1]$ *überall gilt.*

---

[1]) Ein System von Funktionen $\varphi_n(x) \in L^p(E)$ $(1 < p \leqq \infty)$ heißt $L^q(E)$-vollständig $\left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$, falls es keine nicht fast überall verschwindende Funktion $f(x) \in L^q(E)$ gibt, für die $\int_E f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ für jedes n gilt.

Zum Beweis unserer Sätze benutzen wir das folgende wichtige Lemma von OLEVSKIJ [1]:

Seien E_j $(j=1,2,\dots)$ paarweise disjunkte meßbare Mengen positiven Maßes und es sei $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ ein $L^p(E_j)$-vollständiges $(1\leqq p<\infty)$ Orthonormalsystem mit $|\psi_k^{(j)}(x)|\leqq M_{kj}$ für $x\in E_j$. Sei ferner $A_n=\|a_{r,j}^n\|$ eine orthogonale Matrix von l_n-ter Ordnung $(l_{n+1}\geqq l_n,\ l_n\to\infty)$. Wir setzen $\alpha_k=\sum_{n=0}^{k} l_n$ $(l_0=0)$ und

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} a^{(n_i)}_{i-\alpha_{n_i}-1,\,j}\,\psi^{(j)}_{n_i-m_j}(x) & \text{für } x\in E_j,\ 1\leqq j\leqq l_{n_i},\\ 0 & \text{für } x\in E_j,\ j>l_{n_i},\end{cases} \tag{3}$$

wobei n_i und m_j durch die Ungleichungen $\alpha_{n_i-1}<i\leqq\alpha_{n_i}$, $l_{m_j}<j\leqq l_{m_j+1}$ bestimmt werden. Sei $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$. Die Funktionen $\varphi_i(x)$ bilden ein $L^p(E)$-vollständiges orthonormiertes System.

Beweis von Satz I. Da $\varepsilon_k\log k\to\infty$ ist, so kann eine Indexfolge $\{m_n\}$ $((1\leqq)m_1<m_2<\dots<m_n<\dots)$ derart angegeben werden, daß für $k\geqq 2^{m_n}$ die Ungleichung $k^{\varepsilon_k}\geqq 2^{2(n+2)}$ gilt. Wir setzen

$$B_0=\|1\|,\quad B_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{Vmatrix}1&1\\-1&1\end{Vmatrix}$$

und für $n\geqq 2$

$$B_n=\frac{1}{\sqrt2}\left\|\begin{array}{c|c}B_{n-1}&B_{n-1}\\ \hline -B_{n-1}&B_{n-1}\end{array}\right\|.$$

Es ist klar, daß die Matrizen B_n von 2^n-ter Ordnung orthogonal sind. Sei $E_j=\left[1-\frac{1}{2^{j-1}},\ 1-\frac{1}{2^j}\right)$ $(j=1,2,\dots)$. Es ist offenbar, daß für jedes j ein $L(E_j)$-vollständiges, gleichmäßig beschränktes, orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ $(|\psi_k^{(j)}(x)|\leqq M_j,\ M_j\geqq 1)$ angegeben werden kann. Wir setzen $A_n=B_{m_n}$ $(n=1,2,\dots)$.

Wir können auf die Mengen E_j, die Funktionensysteme $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ und die Matrizen A_n das Lemma anwenden. Die in diesem Fall durch (3) definierten Funktionen $\psi_i(x)$ $(i=1,2,\dots)$ sind nach dem Lemma orthogonal und $L[0,1]$-vollständig. Sei ferner jede $\psi_i(1)=0$. Wir zeigen noch, daß auch die Ungleichung (1) für die $\psi_i(x)$ erfüllt ist. Ist $x\in[0,1)$, so gibt es ein Index $j=j(x)$ mit $x\in E_{j(x)}$. Dann ist $\left(l_n=2^{m_n},\ \alpha_n=\sum_{k=1}^{n}2^{m_k}\text{ und } |a_{r,j}^{(n)}|=2^{-\frac{m_n}{2}}\right)$

$$\sum_{i=\alpha_{n_1}+1}^{\infty}|\psi_i(x)|^{2+\varepsilon_i}=\sum_{n=m_j+1}^{\infty}\ \sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{m_n}}}|\psi^{(j)}_{n-m_j}(x)|\right)^{2+\varepsilon_i}\leqq$$

$$\leqq M_j^3\sum_{n=m_j+1}^{\infty}2\sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n}\frac{1}{2^{m_n}}\cdot\frac{1}{i^{\varepsilon_i/2}}\leqq M_j^3\sum_{n=m_j+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty.$$

Ist $x=1$, so ist (1) nach der Definition von $\psi_i(x)$ offenbar.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

Beweis von Satz II. Sei die Indexfolge $\{m_n\}$ $\big((1\leqq)m_1<m_2<\ldots<m_n<\ldots\big)$ jetzt derart angegeben, daß für $k\geqq 2^{m_n}$ die Ungleichung $\lambda_k \geqq (n+1)^2$ erfüllt ist. Die Mengen E_j, die Funktionen $\psi_k^{(j)}(x)$ und die Matrizen A_n haben die gleiche Bedeutung wie im Satz I. Dann können wir wieder das Lemma anwenden. Bezeichnen $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$ die durch (3) in diesem Fall definierten Funktionen mit $\varphi_i(1)=0$, so sind die Funktionen $\varphi_i(x)$ orthogonal und $L[0,1]$-vollständig. Wir beweisen jetzt die Ungleichung (2). Ist $x\in[0,1)$, so gibt es ein Index $j=j(x)$ mit $x\in E_j$. Nach dem Obigen gilt

$$\sum_{i=\alpha_{n_1}+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}|\Phi_i(x)|^2=\sum_{n=m_j+1}^{\infty}\sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{m_n}}}|\psi_{n-m_j}^{(j)}(x)|\right)^2\leqq$$

$$\leqq M_j^2\sum_{n=m_j+1}^{\infty}\frac{1}{2^{m_n}}\sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n}\frac{1}{\lambda_i}\leqq M_j^2\sum_{n=m_j+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

woraus die Behauptung (2) des Satzes II offenbar folgt.

Schriftenverzeichnis

[1] А. М. Олевский, Об ортогональных рядах по полным системам, *Матем. сборник*, **11 (100)**, (1962), 707—748.

[2] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Acad. Polonaise* (1927), 81—115.

(Eingegangen am 7. Januar 1965)